30/3/18

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ②: Αν E: $\mathbb{R}$-δ.χ. και $B=\{\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}\}$ μια βάση του E, τότε η απεικόνιση
$\langle\, ,\rangle : E\times E \to \mathbb{R}$, $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$
όπου: $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}$
$\vec{y} = y_1\vec{e_1} + \dots + y_n\vec{e_n}$

③ Αν $\lambda_1,\dots,\lambda_n \geq 0$, τότε ορίζοντας απεικόνιση
$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle' = x_1\lambda_1 y_1 + \dots + x_n\lambda_n y_n$, όπου $\vec{x} = (\vec{x_1},\dots,\vec{x_n}) \in \mathbb{R}^n$
$\vec{y} = (\vec{y_1},\dots,\vec{y_n}) \in \mathbb{R}^n$
Τότε το ζεύγος $(\mathbb{R}^n, \langle\, ,\rangle')$: Ευκλείδειος Χώρος

④ Στον $\mathbb{R}$-δ.χ. $M_n(\mathbb{R})$ ορίζουμε απεικόνιση
$\langle\, ,\rangle : M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\langle A,B\rangle = Tr(A\cdot {}^tB)$

Ισχυρισμός: Το ζεύγος $(M_n(\mathbb{R}), \langle\, ,\rangle)$ είναι Ευκλείδειος Χώρος.

Έστω $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$. Τότε:
$(A\cdot {}^tB)_{jj} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{jk}$, $1\leq j\leq n$

$(A\cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$

άρα: $Tr(A\cdot {}^tB) = \sum_{j=1}^{n} (A\cdot {}^tB)_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji} b_{ji} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\langle A,B\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}} \quad (*)$$

① $\langle A_1+A_2, B\rangle = Tr((A_1+A_2)\cdot {}^tB)$ $(*)$

$Tr: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto Tr(A)$
είναι γραμμική απεικόνιση

(*) $\Rightarrow \langle A_1+A_2, B\rangle = Tr(A_1 \cdot {}^tB + A_2 \cdot {}^tB) =$
$= Tr(A_1 \cdot {}^tB) + Tr(A_2 \cdot {}^tB) = \langle A_1, B\rangle + \langle A_2, B\rangle$

(2) $\langle \lambda A, B\rangle = Tr(\lambda \cdot A \cdot {}^tB) = Tr(\lambda \cdot (A \cdot {}^tB)) =$
$= \lambda \cdot Tr(A \cdot {}^tB) = \lambda \cdot \langle A, B\rangle$

(3) $\langle A, B\rangle = Tr(A \cdot {}^tB) = Tr({}^t(A \cdot {}^tB)) =$
$= Tr({}^t({}^tB) \cdot {}^tA) = Tr(B \cdot {}^tA) = \langle B, A\rangle$

(4) $\langle A, A\rangle \overset{(*)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$ και $\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_{ij}^2 = 0 \quad \forall i,j = 1, \dots, n$
$\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad 1 \leq i,j \leq n$

(5) Στον $\mathbb{R}$-δ.χ. $\mathbb{R}_n[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό $\leq n$, ορίζουμε απεικόνιση:
$\langle , \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$
$\langle P(x), Q(x)\rangle = \int_0^1 P(x) \cdot Q(x)\, dx$

Οι ιδιότητες (1) - (3) του εσωτερικού γινομένου αποδεικνύονται εύκολα.

(4) $\langle P(x), P(x)\rangle = \int_0^1 P^2(x)\, dx \geq 0$, διότι
$\forall x \in [0,1]: P^2(x) \geq 0$

$\langle P(x), P(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 P^2(x)\, dx = 0 \Leftrightarrow P^2(x) = 0, \forall x \in [0,1]$
$\Leftrightarrow P(x) = 0, \forall x \in [0,1] \Leftrightarrow P(x) =$ μηδενικό πολυώνυμο, διότι διαφορετικά το $P(x)$ είναι βαθμού $\leq n$ και θα έχει όλα τα στοιχεία του $[0,1]$ ~~[illegible]~~ ως ρίζες: άτοπο

Άρα το ζεύγος $(\mathbb{R}_n[x], \langle , \rangle)$: Ευκλείδειος Χώρος

⑥ Έστω $C([0,1],\mathbb{R}) = \{ f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f: \text{συνεχής} \}$

Τότε ο $C([0,1],\mathbb{R})$ είναι $\mathbb{R}$-δ.χ. με πράξεις:
$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \forall x\in[0,1]$

$(\lambda\cdot f)(x) = \lambda\cdot f(x) \quad , \forall x\in[0,1]$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$

$\dim_{\mathbb{R}} C([0,1],\mathbb{R}) = \infty$, διότι οι συναρτήσεις: $[0,1]\to\mathbb{R}$
$f_0(x) = 0 \quad , \forall x\in[0,1]$
$f_1(x) = 0 \quad , \forall x\in[0,1]$
$\vdots$
$f_n(x) = x_i^{\,n} \quad \forall x\in[0,1]$

$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx$, $(C([0,1],\mathbb{R}, \langle\,,\rangle)$: Ευκλείδειος χώρος

Έστω $(E, \langle\,,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος.
Αν $\vec{x}\in E$, τότε το μήκος του $\vec{x}$ ορίζεται να είναι ο μη-αρνητικός αριθμός:

$$\boxed{\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}}$$

Τότε:

- $\|\vec{x}\| \geq 0$ και: $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

- $\|\lambda\cdot\vec{x}\| = \sqrt{\langle\lambda\vec{x},\lambda\vec{x}\rangle} = \sqrt{\lambda^2\cdot\langle\vec{x},\vec{x}\rangle} = |\lambda|\cdot\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle} =$
$= |\lambda|\cdot\|\vec{x}\|$

- $\|\vec{x}+\vec{y}\| = \sqrt{\langle\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}\rangle} = \sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle + \langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{x}\rangle + \langle\vec{y},\vec{y}\rangle} =$

$= \sqrt{\|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \|\vec{y}\|^2}$. Άρα: $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \|\vec{y}\|^2$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ CAUCHY - SCHWARZ: Σε έναν Ευκλείδειο Χώρο $(E, \langle,\rangle)$: $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E$:

$$\boxed{|\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \quad (*)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αν $\vec{y} = \vec{0}$ τότε: $|\langle \vec{x}, \vec{0}\rangle| = 0 = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{0}\|$

$\Rightarrow$ η $(*)$ ισχύει ως ισότητα

Έστω ότι $\vec{y} \neq \vec{0}$. Τότε ορίζεται το διάνυσμα

$$\vec{z} = \frac{1}{\|\vec{y}\|} \cdot \vec{y}$$

$$\|\vec{z}\|^2 = \langle \vec{z}, \vec{z}\rangle = \left\langle \frac{1}{\|\vec{y}\|} \cdot \vec{y}, \frac{1}{\|\vec{y}\|} \cdot \vec{y} \right\rangle = \frac{1}{\|\vec{y}\|^2} \cdot \langle \vec{y}, \vec{y}\rangle =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\|\vec{y}\|^2}} \cdot \cancel{\|\vec{y}\|^2} = 1$$

Άρα: $\|\vec{z}\| = 1$. Θέτουμε: $\lambda = \langle \vec{x}, \vec{z}\rangle$

Τότε: $\lambda = \left\langle \vec{x}, \frac{1}{\|\vec{y}\|} \cdot \vec{y} \right\rangle = \frac{1}{\|\vec{y}\|} \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$ $(*)$

$$0 \leq \|\vec{x} - \lambda\vec{z}\|^2 = \langle \vec{x} - \lambda\vec{z}, \vec{x} - \lambda\vec{z}\rangle =$$

$$= \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle - \langle \vec{x}, \lambda\vec{z}\rangle - \langle \lambda\vec{z}, \vec{x}\rangle + \langle \lambda\vec{z}, \lambda\vec{z}\rangle =$$

$$= \|\vec{x}\|^2 - 2\lambda\langle \vec{x}, \vec{z}\rangle + \lambda^2 \cdot \underbrace{\langle \vec{z}, \vec{z}\rangle}_{1} =$$

$$= \|\vec{x}\|^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = \|\vec{x}\|^2 - \lambda^2$$

Άρα: $\|\vec{x}\|^2 - \lambda^2 \geq 0 \Rightarrow \|\vec{x}\|^2 \geq \lambda^2 \overset{(*)}{=} \frac{1}{\|\vec{y}\|^2} \cdot \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \Rightarrow |\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ① Στον Ευκλείδειο Χώρο $(\mathbb{R}^n, <,>)$:
$\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ &
$\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1y_1 + \ldots + x_ny_n| \leq \left(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right)\left(\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}\right)$

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$: $\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:
$<\vec{x}, \vec{y}>' = x_1\lambda_1y_1 + \ldots + x_n\lambda_ny_n$
Τότε το ζεύγος $(\mathbb{R}^n, <,>')$: Ευκλείδειος Χώρος
$\Rightarrow |x_1\lambda_1y_1 + \ldots + x_n\lambda_ny_n| \leq \sqrt{\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2} \sqrt{\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2}$

② Στον Ευκλείδειο Χώρο $(\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), <,>)$,
$<A, B> = Tr(A \cdot {}^tB)$. Τότε:

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \right| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2}$$

③ Στον Ευκλείδειο Χώρο $(\mathbb{R}_n[x], <,>)$, όπου:
$<P(x), Q(x)> = \int_0^1 P(x) \cdot Q(x)\, dx$

$$\left| \int_0^1 P(x) Q(x)\, dx \right| \leq \sqrt{\int_0^1 P^2(x)\, dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 Q^2(x)\, dx}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η ανισότητα Cauchy - Schwarz είναι ισότητα $\Leftrightarrow \{\vec{x}, \vec{y}\}$ Γ.Ε.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:
"$\Leftarrow$" Έστω ότι τα $\vec{x}, \vec{y}$: Γ.Ε. $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\boxed{\vec{y} = \lambda \cdot \vec{x}}$.

Τότε: $|<\vec{x}, \vec{y}>| = |<\vec{x}, \lambda\vec{x}>| = |\lambda \cdot <\vec{x}, \vec{x}>| =$
$= |\lambda| \cdot |\|\vec{x}\|^2| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|^2$ ①

$\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\lambda \cdot \vec{x}\| = \|\vec{x}\| \cdot |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|^2$ ②

Από ①,② $\Rightarrow |<\vec{x}, \vec{y}>| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

$\longrightarrow$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι: $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$. Αν $\vec{x} = \vec{0}$ ή $\vec{y} = \vec{0}$ τότε προφανώς τα $\vec{x}, \vec{y}$: Γ.Ε. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$

Τότε: $\boxed{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$ ή $\boxed{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$

- Έστω ότι: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

$$\left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \frac{1}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle -$$

$$- \frac{1}{\|\vec{y}\| \cdot \|\vec{x}\|} \cdot \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \frac{1}{\|\vec{y}\|^2} \cdot \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 2 - 2 \frac{1}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle =$$

$$= 2 - 2 = 0$$

Άρα: $\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \dfrac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \vec{0} \Rightarrow \vec{y} = \dfrac{\|\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{x}, \vec{y}$: Γ.Ε.

- Έστω ότι: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$. Τότε παρόμοια

$$\left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} + \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} + \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} + \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \vec{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{y} = -\dfrac{\|\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x} \Rightarrow \vec{x}, \vec{y}$: Γ.Ε.

$$\boxed{\begin{aligned} &\left| \sqrt{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n} \right| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y_i = \lambda x_i, \ 1 \leq i \leq n \ \text{για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ MINKOWSKI: (Τριγωνική Ανισότητα):

Έστω $(E, <,>)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}, \vec{y} \in E$. Τότε: $\boxed{\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|}$ (*)

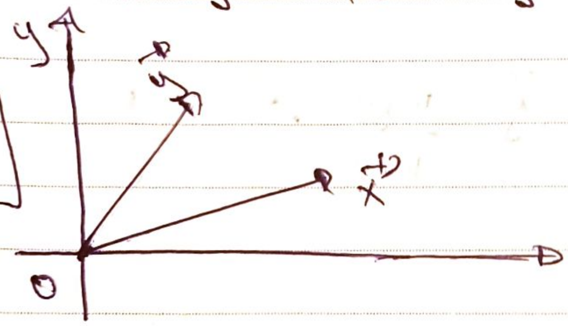
ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = <\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}> =$
$= <\vec{x},\vec{x}> + <\vec{x},\vec{y}> + <\vec{y},\vec{x}> + <\vec{y},\vec{y}> =$
$= \|\vec{x}\|^2 + 2<\vec{x},\vec{y}> + \|\vec{y}\|^2 \le \|\vec{x}\|^2 + 2|<\vec{x},\vec{y}>| + \|\vec{y}\|^2 \le$

C-S

$\le \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

$\boxed{\mathbb{R}^2}$

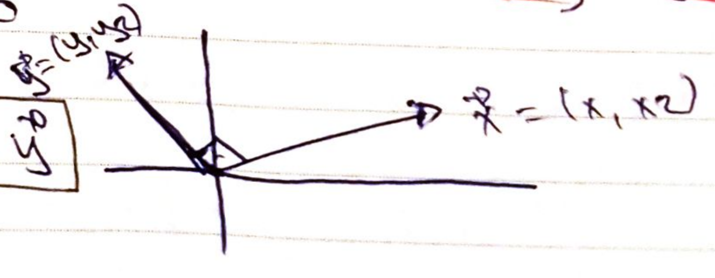


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: 1 Στον Ευκλ. Χώρο $(\mathbb{R}^4, <,>)$
$\forall\ \vec{x} = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4$,
$\vec{y} = (y_1, \dots, y_4) \in \mathbb{R}^4$: $\sqrt{(x_1+y_1)^2 + \dots + (x_4+y_4)^2} \le \sqrt{x_1^2 + \dots + x_4^2} + \sqrt{y_1^2 + \dots + y_4^2}$

Έστω $(E, <,>)$ ένας Ευκλείδειος Χώρος και έστω $\vec{x}, \vec{y} \in E$.

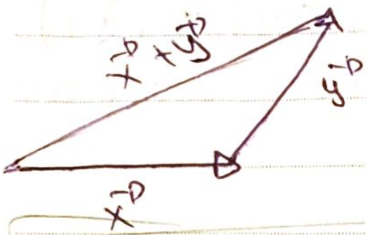
- Το $\vec{x}$ καλείται μοναδιαίο διάνυσμα $\Leftrightarrow \|\vec{x}\| = 1$
- Τα $\vec{x}, \vec{y}$ καλούνται κάθετα ή ορθογώνια $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow <\vec{x},\vec{y}> = 0$

και τότε θα γράφουμε: $\boxed{\vec{x} \perp \vec{y}}$



ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $\vec{x}, \vec{y} \in E$, τότε: $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ τα $\vec{x}, \vec{y}$ είναι κάθετα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \|\vec{y}\|^2 =$
$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \Leftrightarrow 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$



ΑΣΚΗΣΗ: Αν $\vec{x}, \vec{y} \in E$, τότε: $\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \lambda \geq 0: \vec{y} = \lambda \cdot \vec{x}$ (Για το σπίτι)

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in E$. Τότε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz: $|\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Αν $\vec{x} \neq \vec{0}, \vec{y} \neq \vec{0}$, τότε:

$$\left| \frac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \leq 1$$

Τότε υπάρχει μοναδική γωνία $\theta \in [0, \pi]$:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

$\cos: [0, \pi] \to [-1, 1]$
$\theta \to \cos(\theta)$

Η γωνία θ καλείται η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ και γράφουμε:
$\theta = \measuredangle(\vec{x}, \vec{y})$

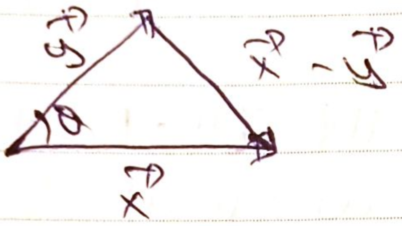
Άρα, $\forall \vec{x} \neq \vec{0}, \vec{y} \neq \vec{0}: \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\theta)$,
όπου $\theta = \measuredangle(\vec{x}, \vec{y})$

Έτσι: $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{2}$

(*) $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E: \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y} \rangle =$
$= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 -$
$- 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos(\measuredangle(\vec{x}, \vec{y}))$

Άρα: $\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\measuredangle(\vec{x}, \vec{y}))$

Νόμος Συνημιτόνων



16/4/18

Ένα διάνυσμα $\vec{x} \in E$ καλείται μοναδιαίο $\Leftrightarrow$ $\|\vec{x}\| = 1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $\vec{x} \in E$ και $\vec{x} \neq \vec{0}$, τότε το διάνυσμα: $\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ είναι μοναδιαίο, διότι:

$$\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\|^2 = \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2} \cdot \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle =$$
$$= \frac{1}{\|\vec{x}\|^2} \cdot \|\vec{x}\|^2 = 1 \Rightarrow \left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\| = 1$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_\nu}\} \subseteq E$ καλείται:

(1) Ορθογώνιο $\Leftrightarrow \langle \vec{x_i}, \vec{x_j} \rangle = 0, \ \forall\ 1 \leq i \neq j \leq \nu$

(2) Ορθοκανονικό $\Leftrightarrow \langle \vec{x_i}, \vec{x_j} \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \Leftrightarrow$